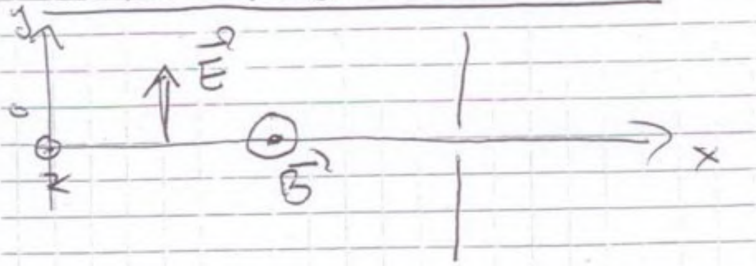
Champs Magnétiques

Exo 1

Le sélecteur de vitesse



$\vec{E} = E\,\vec{u}_y$
$\vec{B} = B\,\vec{u}_z$
$\vec{v} = v\,\vec{u}_x$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Pour passer par la fente, la particule ne doit pas dévier de sa trajectoire :

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow E\,\vec{u}_y + vB\,\vec{u}_x \times \vec{u}_z = (E - vB)\,\vec{u}_y = \vec{0}$$

$v = \dfrac{E}{B}$: seules les particules ayant cette vitesse passent par la fente

Le spectromètre de masse

${}^{A}_{A-32}Ge^{32}$: $n_p = 32 = Z$
$72, = A$

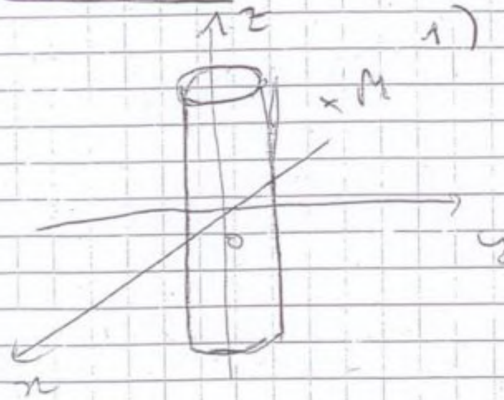
$m_p \simeq 1{,}67\;10^{-27}$ kg $\simeq m_n \simeq u$

$R = \dfrac{mv}{qB}$ $\qquad \dfrac{R_1}{R_i} = \dfrac{m_1}{m_i}$: le rapport des rayons vaut le rapport des masses.

$R_1 = 22{,}8$ cm, $m_1 = 76\,u$
$R_2 = 22{,}2$ cm, $m_2 = 74\,u$
$R_3 = 21{,}9$ cm, $m_3 = 73\,u$
$R_4 = 21{,}6$ cm, $m_4 = 72\,u$
$R_5 = 21$ cm, $m_5 = 70\,u$

~~Correction des exercices Magnétostatique I~~

Exercice 2

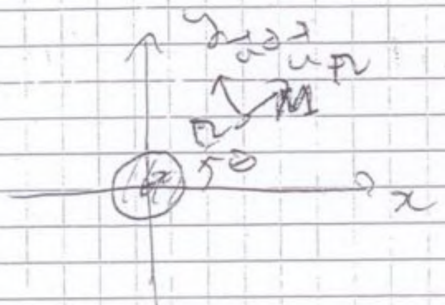


1) $I = \vec{j}\cdot\vec{u}_z\,\pi R^2$ $\quad \vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{u}_z$

M point quelconque au dehors du conducteur.

Plan (Oz, OM) est de symétrie

En appariant toutes les lignes de courant symétriques par rapport à ce plan, on réalise aisément que la somme des contributions à $\vec{B}$ est selon $\vec{u}_\theta$: $\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$



Th. d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$$

C = cercle contenant M d'axe Oz.

$$2\pi\rho B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

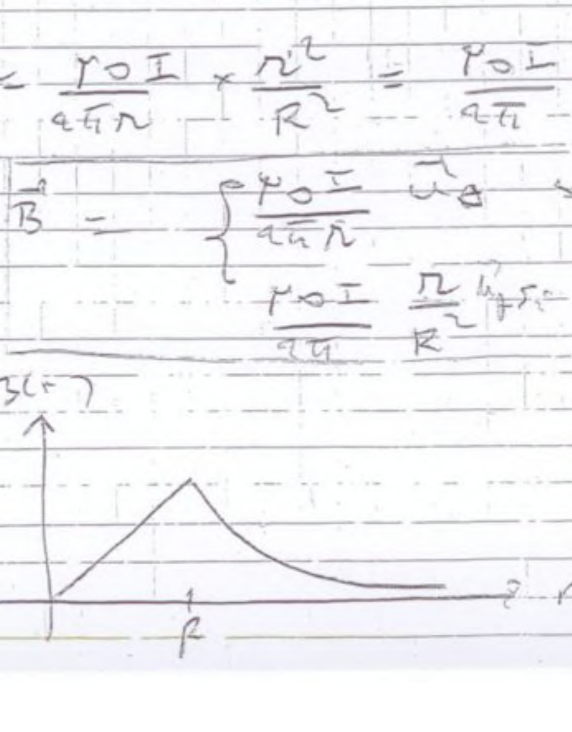
Si M ∈ conducteur, i.e. $r \leq R$:

$$2\pi r B = \mu_0\, i(r)$$

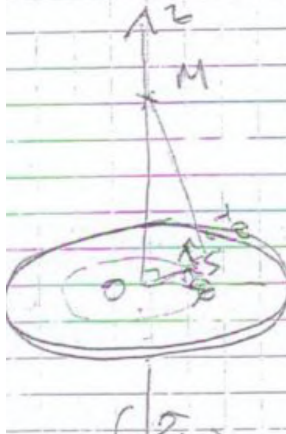
$i(r)$ = intensité dans le contour de rayon r $= I\left(\frac{r}{R}\right)^2$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\times\frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}$$

Donc : $$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}\vec{u}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$



Exercice 3



Les plans contenant l'axe (Oz) sont les plans d'antisymétrie ($\vec{j} \perp$ à ces plans) $\Rightarrow \vec{B} \in$ tous les plans $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(z)\,\vec{u}_z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{S\,\text{disque}} \frac{\vec{j} \times \vec{SM}}{|\vec{SM}|^3}\,ds = (\vec{B}\cdot\vec{u}_z)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{j}(S) = \sigma \underbrace{r\omega\,\vec{u}_\theta}_{\vec{v}(S)} \qquad r = |\vec{OS}|$$

$$\vec{SM} = z\vec{u}_z - r\vec{u}_r$$

$$\vec{j}\times\vec{SM} = \sigma r\omega\,(z\,\vec{u}_r + r\,\vec{u}_z)$$

$$\vec{B}\cdot\vec{u}_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^R \frac{\sigma\omega r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \times r \times 2\pi \times dr$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \frac{r^3\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\sigma\omega|z|}{2}\int_0^{R/z} \frac{u^3\,du}{(1+u^2)^{3/2}}$$

$$I = \int_0^{\frac{R}{z}} \frac{u^3\,du}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{v=u^2}{=} \int_0^{\frac{R^2}{z^2}} \frac{u^3 \times \frac{1}{2u}\,dv}{(1+v)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{R^2}{z^2}} \frac{v\,dv}{(1+v)^{3/2}}$$

$$dv = 2u\,du$$

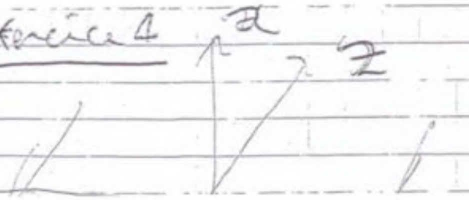
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{R^2}{z^2}} \frac{dv}{\sqrt{1+v}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{R^2}{z^2}} \frac{dv}{(1+v)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 2\left[\sqrt{1+v}\right]_0^{R^2/z^2} + 2\left[(1+v)^{-1/2}\right]_0^{R^2/z^2} \right\}$$

$$= \sqrt{1+R^2/z^2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}} - 1$$

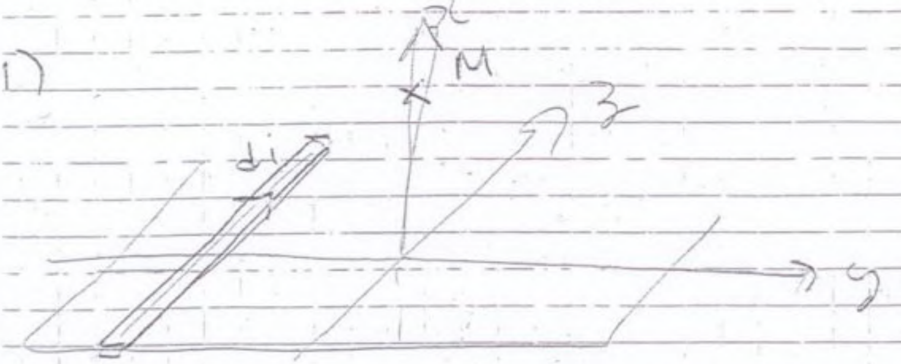
Donc $$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\sqrt{z^2+R^2} - 2|z| + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\vec{u}_z}$$

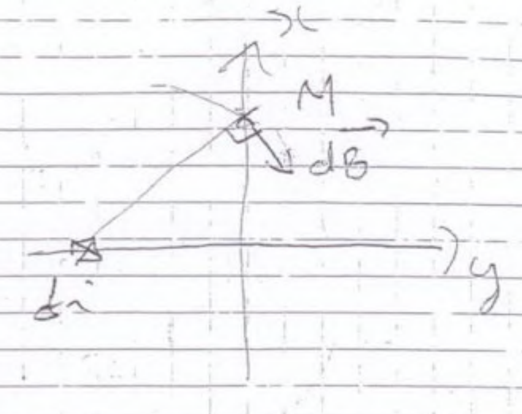
Exercice 4



Prenons $\vec{j_s} = j\,\vec{u_z}$

1)





Soit M au-dessus du plan infini $x = 0$.

$$d\vec{B} = \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{\sqrt{y^2+x_M^2}}}_{\text{distance au tube de courant}}\ \underbrace{\frac{y\vec{u_x}+x_M\vec{u_y}}{\sqrt{y^2+x_M^2}}}_{\text{vecteur unitaire orthoradial par rapport au tube de courant infinitésimal}}$$

di = intensité infinitésimale dans le tube de courant

$= j\,dy$

$$\vec{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+x_M^2}\left(y\vec{u_x}+x_M\vec{u_y}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 j\, x_M}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+x_M^2}}_{|x_M|^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{|x_M|}}\vec{u_y} = \frac{\mu_0 j}{2}\vec{u_y}$$

Donc $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 j}{2}\vec{u_y}$ au dessus du plan ($x>0$)

$= -\dfrac{\mu_0 j}{2}\vec{u_y}$ en-dessous ($x<0$)

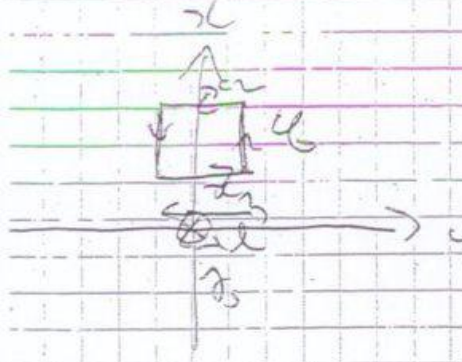
(puisque $x = 0$ est un plan de symétrie)

$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0\,\vec{j_s}\times\vec{n}$ dans tous les cas

$\vec{n} = \vec{u_x}$ si $x>0$, $\vec{n} = -\vec{u_x}$ si $x<0$

appariement de lignes de courant

~~Donc~~ Par symétrie, on sait que $\begin{cases} \vec{B} = B(x)\,\vec{u_y} \\ B(-x) = -B(x) \end{cases}$



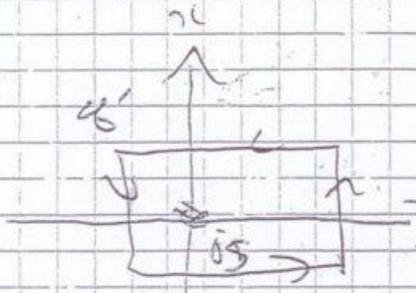
Th d'Ampère pour $\mathcal{C}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = 0 = l\,(B(x_1) - B(x_2))$$

$\Rightarrow B(x_1) = B(x_2)$ ne dépend pas de x

De même sous le plan, $B(x)$ ne dépend pas de x (ou simplement car $B(-x) = -B(x)$)

Donc $\vec{B} = \begin{cases} B\,\vec{u_y} & x>0 \\ -B\,\vec{u_y} & x<0 \end{cases}$



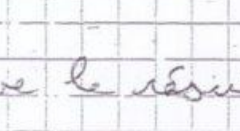
Th d'Ampère le long de $\mathcal{C}'$:

$$\oint_{\mathcal{C}'} \vec{B}\cdot\vec{dl} = l\,(-B-B) = -\mu_0\, j\, l$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2}\mu_0 j$$

On retrouve le résultat de la question 1)

Exercice 5



1)

$$d\vec{m} = \overbrace{R\sin\theta\,\omega\,\sigma\,R\,d\theta}^{di\,:\ \text{intensité infinitésimale dans le circuit}} \times \underbrace{\pi R^2 \sin^2\theta}_{\text{surface entourée par le circuit}}\,\vec{u_z}$$

$$d\vec{m} = \pi R^4 \sigma\omega \sin^3\theta\, d\theta\,\vec{u_z}$$

$$\vec{M} = \int d\vec{M} \qquad \theta : 0 \to \pi$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$= -[\cos\theta]_0^\pi + \frac{1}{3}[\cos^3\theta]_0^\pi$$

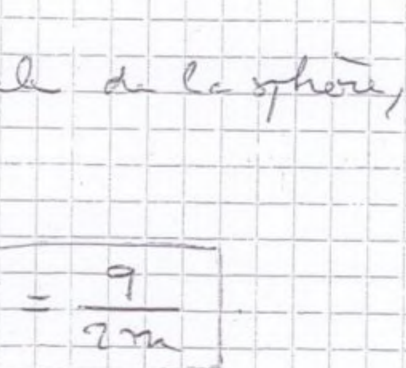
$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{4}{3}\pi R^4 \sigma\omega\, \vec{u_z}$$

Si $q = 4\pi R^2\sigma$ est la charge totale de la sphère, on peut écrire $\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{3} q R^2 \vec{\omega}}$

D'autre part, $\vec{\sigma_0} = \frac{2m}{3}R^2\vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{q}{2m}}$

2) $d\vec{\mathcal{M}} = r\sin\theta\, \omega\, \rho\, r\, d\theta\, dr\, \pi r^2 \sin^2\theta\, \vec{u_z}$



$$= \pi\rho\omega\, r^4 \sin^3\theta\, d\theta\, dr\, \vec{u_z}$$

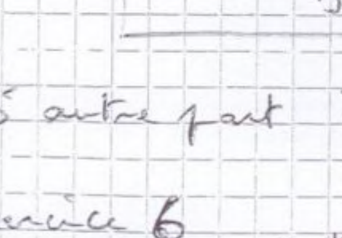
$$\vec{\mathcal{M}} = \pi\rho\omega \frac{R^5}{5} \times \frac{4}{3}\vec{u_z}$$

$$= \frac{4\pi}{15}\rho\omega R^5 \vec{u_z} \qquad q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \frac{q}{5} R^2 \omega\, \vec{u_z}}$$

D'autre part $\vec{\sigma_0} = \frac{2}{5} m R^2 \omega\, \vec{u_z} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{q}{2m}}$

Exercice 6



Méthode 1 : on utilise la surface Σ pour calculer le flux (une partie de Σ est un arc de cylindre d'axe le fil).

$|\vec{OB}| = |\vec{OD}|$ $\quad \vec{OD} = c\,\vec{u}_x + a(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$

$$= (c + a\cos\alpha)\,\vec{u}_x + a\sin\alpha\,\vec{u}_y$$

$$|\vec{OD}|^2 = (c + a\cos\alpha)^2 + a^2\sin^2\alpha = c^2 + 2ac\cos\alpha + a^2$$

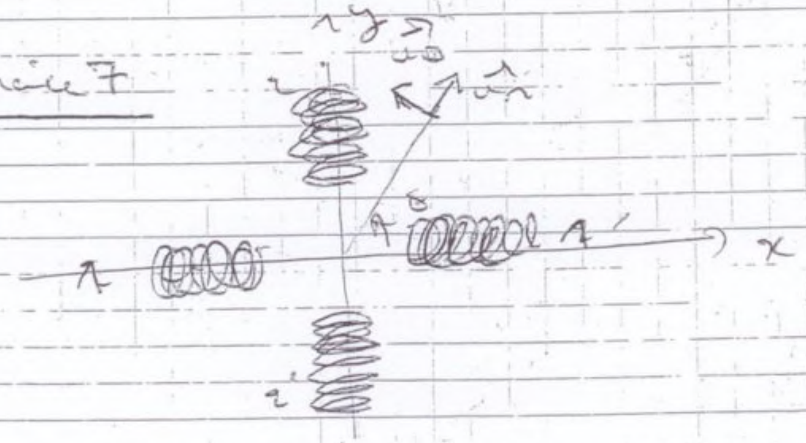
$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\vec{u}_y}{x}$ sur la partie plate de Σ.

$$\phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{u}_y\, d^2\Sigma = b\,\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_c^{|\vec{OB}|}\frac{dx}{x}$$

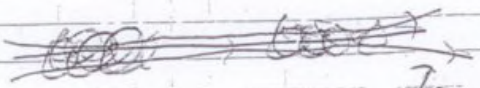
$$\boxed{\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\, b\, \ln\sqrt{1 + \frac{2a}{c}\cos\alpha + \frac{a^2}{c^2}}}$$

Exercice 7

1)



Dans une bobine infinie le champ est uniforme.
Ici les bobines ne sont pas infinies et il y a un espace libre entre les bobines, mais le champ reste uniforme à une bonne approximation



lignes de champ

Le champ créé par les 2 bobines selon l'axe des x, qui sont alimentées par $I_1 = I_0 \cos \omega t$, sera de la forme $\vec{B}_1 = B \cos \omega t \ \vec{u}_x$

[pour être précis :

$$B = 2 \times \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

car 2 bobines identiques

nombre d'enroulement dans la bobine]

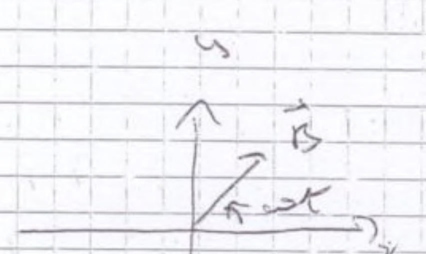
Le champ créé par les 2 bobines selon l'axe des y est
$\vec{B}_2 = B \sin \omega t \ \vec{u}_y$

Le champ total est donc $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

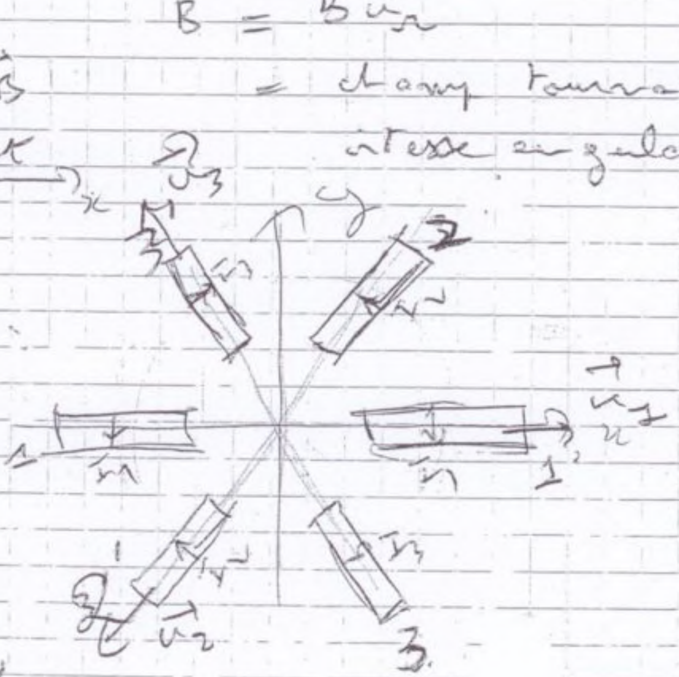
$$= B(\cos \omega t \ \vec{u}_x + \sin \omega t \ \vec{u}_y)$$

$$\vec{B} = B \vec{u}_r$$

= champ tournant à la vitesse angulaire ω.



2) Même idée qu'en 1 :



$\vec{B}_1 = B \cos \omega t \ \vec{u}_1$

$\vec{B}_2 = B \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \ \vec{u}_2$

$\vec{B}_3 = B \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \ \vec{u}_3$

$\vec{u}_1 = \vec{u}_x$

$\vec{u}_2 = \cos \frac{4\pi}{3} \ \vec{u}_x + \sin \frac{4\pi}{3} \ \vec{u}_y$

$\vec{u}_3 = \cos \frac{2\pi}{3} \ \vec{u}_x + \sin \frac{2\pi}{3} \ \vec{u}_y$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = B\Big[\Big(\cos\omega t + \cos\frac{4\pi}{3}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$+ \cos\frac{2\pi}{3}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\Big)\vec{u}_x$$
$$+ \Big(\sin\frac{4\pi}{3}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$+ \sin\frac{2\pi}{3}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\Big)\vec{u}_y\Big]$$

On utilise : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$\vec{B} = B\Big\{\Big[\cos\omega t - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t\right)\Big]\vec{u}_x$$
$$+ \Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t\right)\Big]\vec{u}_y$$
$$= B\left(\frac{3}{2}\cos\omega t\ \vec{u}_x - \frac{3}{2}\sin\omega t\ \vec{u}_y\right)$$

Avec la configuration que l'on a choisi, on a un champ magnétique tournant avec $\theta = -\omega t$.
Pour avoir $\theta = +\omega t$, il suffit de brancher le système de bobines 2-2' sur la figure avec le courant I_3, et le système 3-3' avec le courant I_2.